

## Elementos básicos para a construção de matrizes

Aqui tomaremos o conjunto  $N$  dos números naturais, como:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

O produto cartesiano  $N \times N$  indicará o conjunto de todos os pares ordenados da forma  $(a, b)$ , onde  $a$  e  $b$  são números naturais, isto é:

$$N \times N = \{(a, b) : a \text{ e } b \text{ são números naturais}\}$$

Uma relação importante em  $N \times N$  é:

$$S_{mn} = \{(i, j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

## Definição de matriz

Uma matriz real (ou complexa) é uma função que a cada par ordenado  $(i, j)$  no conjunto  $S_{mn}$  associa um número real (ou complexo).

Uma forma comum e prática para representar uma matriz definida na forma acima é através de uma tabela contendo  $m \times n$  números reais (ou complexos). Identificaremos a matriz abaixo com a letra  $A$ .

$a(1,1)$	$a(1,2)$	...	$a(1,n)$
$a(2,1)$	$a(2,2)$	...	$a(2,n)$
...	...	...	...
$a(m,1)$	$a(m,2)$	...	$a(m,n)$

## Definições básicas sobre matrizes

1. **Ordem:** Se a matriz  $A$  tem  $m$  linhas e  $n$  colunas, dizemos que a ordem da matriz é  $m \times n$ .
2. **Posição de um elemento:** Na tabela acima a posição de cada elemento  $a_{ij} = a(i, j)$  é indicada pelo par ordenado  $(i, j)$ .
3. **Notação para a matriz:** Indicamos uma matriz  $A$  pelos seus elementos, na forma:  $A = [a(i, j)]$ .
4. **Diagonal principal:** A diagonal principal da matriz é indicada pelos elementos da forma  $a(i, j)$  onde  $i = j$ .
5. **Matriz quadrada** é a matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas, i.e.,  $m = n$ .
6. A **diagonal secundária** de uma matriz quadrada de ordem  $n$  é indicada pelos  $n$  elementos:

$$a(1, n), a(2, n-1), a(3, n-2), a(4, n-3), a(5, n-4), \dots, a(n-1, 2), a(n, 1)$$

7. **Matriz diagonal** é a que tem elementos nulos fora da diagonal principal.
8. **Matriz real** é aquela que tem números reais como elementos.
9. **Matriz complexa** é aquela que tem números complexos como elementos.
10. **Matriz nula** é aquela que possui todos os elementos iguais a zero.

11. **Matriz identidade**, denotada por  $I_d$ , tem os elementos da diagonal principal iguais a 1 e zero fora da diagonal principal.
12. **Matriz diagonal** é aquela que tem todos os elementos nulos fora da diagonal principal. Alguns elementos da diagonal principal podem ser nulos.

### Exemplos de matrizes

Matriz 4x4 de números reais:

12	-6	7	18
-23	-24	0	0
0	0	5	0
0	0	0	9

Matriz 4x4 de números complexos:

12	-6+i	7	i
-i	-24	0	0
0	0	5+i	5-i
0	0	0	9

Matriz nula com duas linhas e duas colunas:

0	0
0	0

Matriz nula com três linhas e duas colunas:

0	0
0	0
0	0

Matriz identidade com três linhas e três colunas:

1	0	0
0	1	0
0	0	1

Matriz diagonal com quatro linhas e quatro colunas:

23	0	0	0
0	-56	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	0	100

## Matrizes iguais

Duas matrizes  $A=[a(i,j)]$  e  $B=[b(i,j)]$ , de mesma ordem  $m \times n$ , são iguais se todos os seus correspondentes elementos são iguais, isto é:

$$a(i,j) = b(i,j)$$

para todo par ordenado  $(i,j)$  em  $S_{mn}$ .

**Exercício:** Determinar os valores de  $x$  e  $y$  para que sejam iguais as matrizes abaixo, isto é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & y-1 \\ x+y & x^2 \end{bmatrix}$$

## Soma de matrizes e suas propriedades

A soma (adição) de duas matrizes  $A=[a(i,j)]$  e  $B=[b(i,j)]$  de mesma ordem  $m \times n$ , é uma outra matriz  $C=[c(i,j)]$ , definida por:

$$c(i,j) = a(i,j) + b(i,j)$$

para todo par ordenado  $(i,j)$  em  $S_{mn}$ .

**Exemplo:** A soma das matrizes  $A$  e  $B$  é a terceira matriz indicada abaixo.

$$\begin{bmatrix} -23 & 10 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 15 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$$

### Propriedades da soma de matrizes

**A1: Associativa:** Para quaisquer matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , de mesma ordem  $m \times n$ , vale a igualdade:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

**A2: Comutativa:** Para quaisquer matrizes  $A$  e  $B$ , de mesma ordem  $m \times n$ , vale a igualdade:

$$A + B = B + A$$

**A3: Elemento neutro:** Existe uma matriz nula  $0$  que somada com qualquer outra matriz  $A$  de mesma ordem, fornecerá a própria matriz  $A$ , isto é:

$$0 + A = A$$

**A4: Elemento oposto:** Para cada matriz A, existe uma matriz -A, denominada a oposta de A, cuja soma entre ambas fornecerá a matriz nula de mesma ordem, isto é:

$$A + (-A) = 0$$

### Multiplicação de escalar por matriz e suas propriedades

Seja k um escalar e  $A=[a(i,j)]$  uma matriz. Definimos a multiplicação do escalar k pela matriz A, como uma outra matriz  $C=k.A$ , definida por:

$$c(i,j) = k. a(i,j)$$

para todo par ordenado (i,j) em  $S_{mn}$ .

**Exemplo:** A multiplicação do escalar -4 pela matriz A, definida por:

$$-4 \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -40 \\ 28 & 36 \end{bmatrix}$$

### Propriedades da multiplicação de escalar por matriz

**E1: Multiplicação pelo escalar 1:** A multiplicação do escalar 1 por qualquer matriz A, fornecerá a própria matriz A, isto é:

$$1.A = A$$

**E2: Multiplicação pelo escalar zero:** A multiplicação do escalar 0 por qualquer matriz A, fornecerá a matriz nula, isto é:

$$0.A = 0$$

**E3: Distributividade das matrizes:** Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem e para qualquer escalar k, tem-se:

$$k (A+B) = k A + k B$$

**E4: Distributividade dos escalares:** Para qualquer matriz A e para quaisquer escalares p e q, tem-se:

$$(p + q) A = p A + q A$$

### Multiplicação de matrizes

Seja a matriz  $A=[a(i,j)]$  de ordem  $m \times n$  e a matriz  $B=[b(k,l)]$  de ordem  $n \times r$ . Definimos o produto das matrizes A e B como uma outra matriz  $C=A.B$ , definida por:

$$c(u,v) = a(u,1) b(1,v) + a(u,2) b(2,v) + \dots + a(u,m) b(m,v)$$

para todo par  $(u,v)$  em  $S_{mr}$ .

Para obter o elemento da 2a. linha e 3a. coluna da matriz produto  $C=A.B$ , isto é, o elemento  $c(2,3)$ , devemos:

1. multiplicar os primeiros elementos da 2a. linha e 3a. coluna;
2. multiplicar os segundos elementos da 2a. linha e 3a. coluna;
3. multiplicar os terceiros elementos da 2a. linha e 3a. coluna;
4. multiplicar os quartos elementos da 2a. linha e 3a. coluna;
5. somar os quatro produtos obtidos anteriormente.

Assim:

$$c_{23} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33} + a_{24} b_{43}$$

Podemos visualizar esta operação através das matrizes seguintes. Basta observar a linha em azul na primeira matriz, a coluna em azul na segunda matriz e o elemento em azul na terceira matriz.

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$\times$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{14}$	$=$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$		$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$	$b_{24}$		$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$		$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$	$b_{34}$		$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$	$c_{34}$
$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	$a_{44}$		$b_{41}$	$b_{42}$	$b_{43}$	$b_{44}$		$c_{41}$	$c_{42}$	$c_{43}$	$c_{44}$

**Observação:** Somente podemos multiplicar duas matrizes se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

### Propriedades da multiplicação de matrizes

Para todas as matrizes A, B e C que podem ser multiplicadas, temos algumas propriedades:

**M1: Nem sempre vale a comutatividade:** Em geral,  $A \times B$  é diferente de  $B \times A$ , como é o caso do produto que segue, onde A está cor vermelha e B em cor preta:

1	2	3	$\times$	1	2
2	4	6		3	5
3	6	9		7	9

**M2: Distributividade da soma à direita**

$$A (B+C) = A B + A C$$

**M3: Distributividade da soma à esquerda**

$$(A + B) C = A C + B C$$

#### M4: Associatividade

$$A (B C) = (A B) C$$

**M5: Nulidade do produto:** Pode acontecer que o produto de duas matrizes seja a matriz nula, isto é:  $AB=0$ , embora nem A nem B sejam matrizes nulas, como é o caso do produto:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**M6: Nem sempre vale o cancelamento:** Se ocorrer a igualdade  $AC=BC$ , então nem sempre será verdadeiro que  $A=B$ , pois existem exemplos de matrizes como as apresentadas abaixo, tal que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mas as matrizes A e B são diferentes.

### Matrizes com propriedades especiais

1. Uma matriz A é **nilpotente** de índice k natural, se:

$$A^k = 0$$

2. Uma matriz A é **periódica** de índice k natural, se:

$$A^{k+1} = A$$

3. Uma matriz A é **idempotente**, se:

$$A^2 = A$$

4. As matrizes A e B são **comutativas**, se:

$$A B = B A$$

5. As matrizes A e B são **anti-comutativas**, se:

$$A B = - B A$$

6. A matriz **identidade**  $I_d$  multiplicada por toda matriz A, fornecerá a própria matriz A, quando o produto fizer sentido.

$$I_d A = A$$

7. A matriz A será a inversa da matriz B, se:

$$A B = I_d \text{ e } B A = I_d$$

### A transposta de uma matriz e suas propriedades

Dada uma matriz  $A=[a(i,j)]$  de ordem  $m \times n$ , definimos a transposta da matriz A como a matriz

$$A^t = [a(j,i)]$$

e segue que as linhas de A se transformam nas colunas de  $A^t$ .

#### Propriedades das matrizes transpostas

T1: A transposta da transposta da matriz é a própria matriz.

$$(A^t)^t = A$$

T2: A transposta da multiplicação de um escalar por uma matriz é igual ao próprio escalar multiplicado pela transposta da matriz.

$$(kA)^t = k (A^t)$$

T3: A transposta da soma de duas matrizes é a soma das transpostas dessas matrizes.

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

T4: A transposta do produto de duas matrizes é igual ao produto das transpostas das matrizes na ordem *trocada*.

$$(A B)^t = B^t A^t$$

### Matrizes simétricas e anti-simétricas e suas propriedades

Uma matriz A é **simétrica** se é uma matriz quadrada tal que:

$$A^t = A$$

Uma matriz A é **anti-simétrica** se é uma matriz quadrada tal que:

$$A^t = -A$$

#### Propriedades das matrizes simétricas e anti-simétricas

S1: Se A é uma matriz simétrica de ordem n, então para todo escalar k, a matriz k.A é simétrica.

S2: Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , então a matriz  $B=A+A^t$  é simétrica.

S3: Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , então a matriz  $B=A-A^t$  é anti-simétrica.

S4: Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , então  $A$  sempre pode ser decomposta como a soma de uma matriz simétrica  $S$  com uma matriz anti-simétrica  $T$ , isto é,  $A=S+T$ , e neste caso:

$$S = (1/2)(A + A^t) \text{ e } T = (1/2)(A - A^t)$$